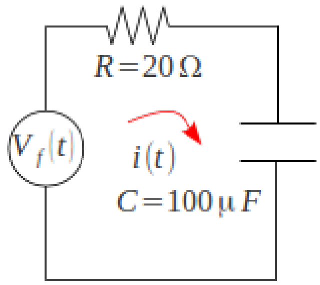
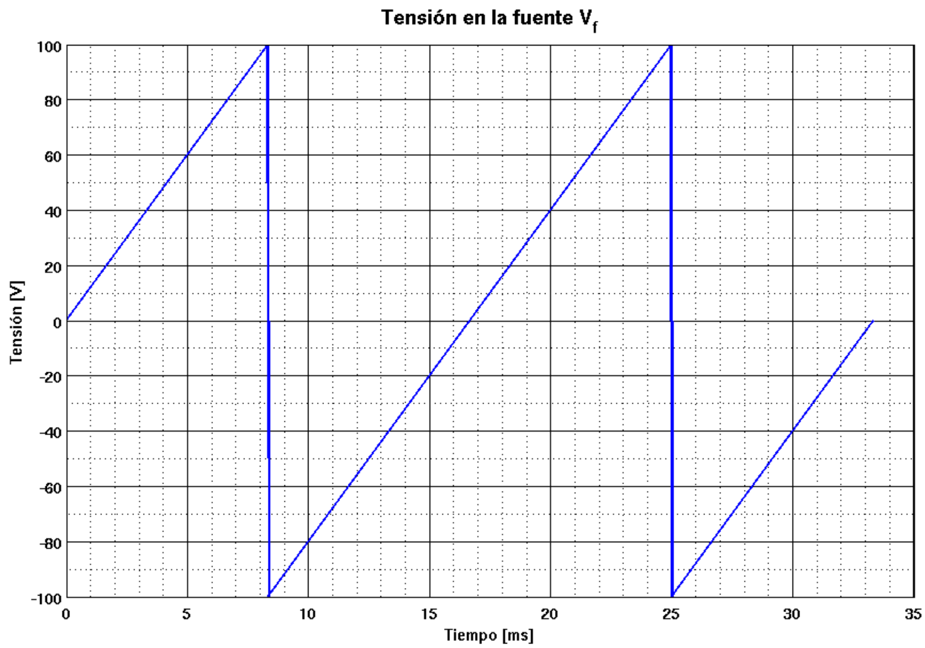
Preparaduría #3: Análisis de Ondas Temporales

Para el circuito de la figura encuentre:





1. **La tensión en cada uno de los elementos**
2. **La corriente eficaz y media.**
3. **La tensión eficaz y media en cada uno de los elementos.**
4. **Los factores de forma.**
5. **La potencia instantánea suministrada por la fuente.**
6. **La potencia disipada en la resistencia.**
7. **Repetir todos los puntos anteriores para una fuente de tensión** $v_f(t) = 100\sin(377t)\,[V]$

La tensión en la fuente queda descrita por la siguiente función a trozos:

$$v_f(t) = \begin{cases} 12000t \ \ [V] & t \in [0; 8.35ms] \\ 12000t - 200 \ \ [V] & t \in [8.35ms; 16.7ms] \end{cases}$$

La ecuación de malla del circuito es:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= v_R(t) + v_C(t) \\ v_f(t) &= i_R(t) \cdot R + v_C(t) \\ v_f(t) &= \left(C\frac{dv_C}{dt}\right) R + v_C(t) \end{aligned}$$

La solución a esta ecuación diferencial de primer orden obedece a dos respuestas: La respuesta natural y la respuesta forzada. El primer tipo de respuesta corresponde al perído transitorio de energización del circuito, y no será considerada en este estudio, pues nos interesa el régimen permanente. Lo que implica que únicamente se encontrará la respuesta forzada del circuito.

La respuesta forzada se puede encontrar por varios métodos, aquí se utilizará el método de los coeficientes indeterminados. De manera que se especifica una solución particular $v_{C_P}(t)$ coherente con la función matemática que describe la fuente de tensión

$$v_{C_P}(t) = At + B$$

Donde A y B son coeficientes de valor desconocido. Pero como $v_{C_P}(t)$ es solución de la ecuación diferencial, debe satisfacerla por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{dv_{C_P}}{dt} &= A \\ v_f(t) &= \left(C\frac{dv_{C_P}}{dt}\right) R + v_{C_P} \\ v_f(t) &= A \cdot C \cdot R + At + B \end{aligned}$$

Para $t \in [0; 8.35ms] \therefore n \in \mathbb{N}$

$$12000t = A \cdot C \cdot R + At + B$$

Dos polinomios son iguales si y solo si sus coeficientes son iguales:

$$\begin{aligned} 12000 &= A \\ 0 &= ACR + B \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se tiene:

$$\begin{aligned} A &= 12000 \\ B &= -12000CR \end{aligned}$$

Por lo que la tensión en el capacitor para este intervalo de tiempo es:

$$v_C(t) = 1200\,(t - CR)$$

Realizando el mismo procedimiento para $t \in [8.35ms; 16.7ms]$ se tiene:

$$v_C(t) = 12000\,(t - CR) - 200$$

De manera que la tensión entre los terminales del capacitor viene dada formalmente por:

$$v_C(t) = \begin{cases} 12000\,(t - CR)\ \ [V] & t \in [0; 8.35ms] \\ 12000\,(t - CR) - 200\ \ [V] & t \in [8.35ms; 16.7ms] \end{cases}$$

La corriente en régimen permanente que circula por la rama es:

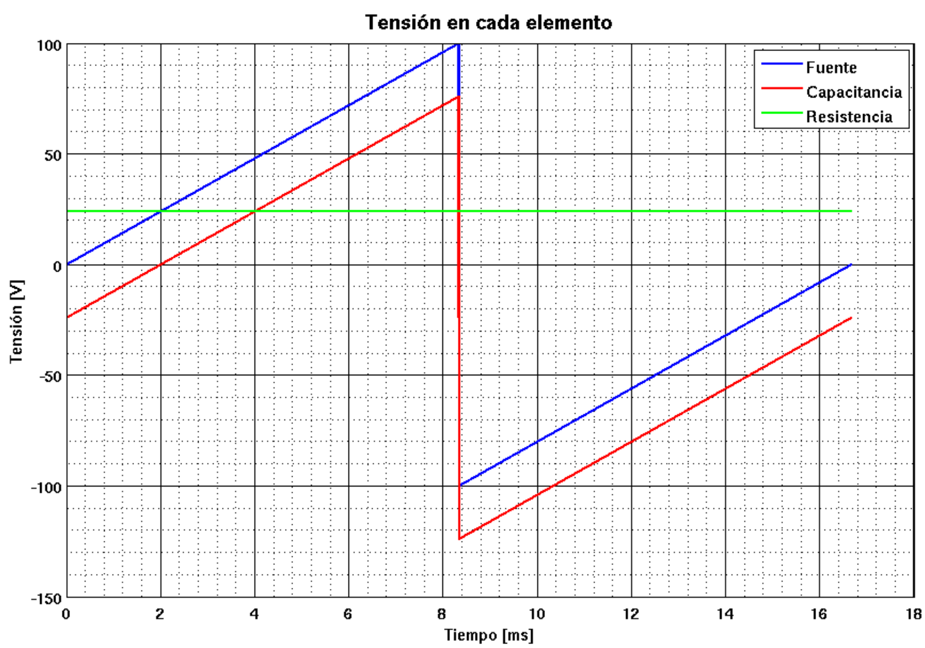
$$i_R(t) = i_C(t) = C\frac{dV_C}{dt} = 12000C \; \forall \, t$$

Esto es, la corriente es constante a pesar de que la fuente es variable en tensión.

Por tanto la tensión que cae en la resistencia es:

$$v_R(t) = i_R(t) \cdot R = 12000RC \; \forall \, t$$

Queda por parte del estudiante verificar la Ley de Kirchhoff de tensiones para la malla. A continuación se muestran las ondas de tensión en el dominio del tiempo.



La corriente eficaz del circuito es:

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (i_R)^2\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (12 \cdot 10^3 C)^2\,dt} = \sqrt{\frac{(12 \cdot 10^3 C)^2}{T} \cdot \int_0^T dt} = \sqrt{\frac{(12 \cdot 10^3 C)^2}{T} T} = 12 \cdot 10^3 C$$

Lo anterior es coherente en vista de que la corriente es constante, por lo que, de forma análoga se puede concluir que $I_{prom} = I_{RMS} = 1,2A$.

La tensión eficaz en la fuente es:

$$V_{f_{RMS}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\left(v_f\left(t\right)\right)^2dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(12\cdot10^3t\right)^2dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(12\cdot10^3t-200\right)^2dt}$$

$$V_{f_{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[144\cdot10^6\left(\int_0^{\frac{T}{2}}\left(t\right)^2dt\right)+\int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(12\cdot10^3t\right)^2-48\cdot10^5t+4\cdot10^4dt\right]}$$

$$V_{f_{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\frac{144\cdot10^6}{3}\cdot\left(\frac{T}{2}\right)^3+\frac{144\cdot10^6}{3}\cdot\frac{7}{8}T^3-\frac{48\cdot10^5}{2}\cdot\frac{3}{4}T^2+4\cdot10^4\cdot\frac{T}{2}\right]}$$

$$V_{f_{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[2\cdot10^4\left(2400T^3-90\cdot T^2+T\right)\right]}$$

$$V_{f_{RMS}} = 100\sqrt{2\left(2400T^2-90\cdot T+1\right)}=57,735V$$

La tensión eficaz en el capacitor es:

$$V_{C_{RMS}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\left(v_C\left(t\right)\right)^2dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\left(12\cdot10^3\left(t-CR\right)\right)^2dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(12\cdot10^3\left(t-CR\right)-200\right)^2dt}$$

$$V_{C_{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[144\cdot10^6\left(\int_0^{\frac{T}{2}}\left(t-CR\right)^2dt\right)+\int_{\frac{T}{2}}^{T}\left(12\cdot10^3\left(t-CR\right)\right)^2\ldots\right.}$$
$$\overline{\left.\ldots-48\cdot10^5\left(t-CR\right)+4\cdot10^4\cdot dt\right]}$$

$$V_{C_{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[144\cdot10^6\left(\int_0^{T}\left(t-CR\right)^2dt\right)\ldots\right.}$$
$$\overline{\left.\ldots+\int_{\frac{T}{2}}^{T}-48\cdot10^5\left(t-CR\right)+4\cdot10^4\cdot dt\right]}$$

$$V_{C_{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[144\cdot10^6\left(\left(T-CR\right)^3-\left(CR\right)^3\right)\ldots\right.}$$
$$\overline{\left.\ldots-48\cdot10^5\left(\left(T-CR\right)^2-\left(T/2-CR\right)^2\right)+4\cdot10^4\frac{T}{2}\right]}$$

$$V_{C_{RMS}} = 100\sqrt{\frac{2}{T}\left[2400\left(\left(\left(T-CR\right)^3-\left(CR\right)^3\right)\right)-120\left(\left(T-CR\right)^2-\left(T/2-CR\right)^2\right)+T\right]}$$

$$V_{C_{RMS}} = 62,5247V$$

La tensión eficaz y promedio en la resistencia es $V_{R_{RMS}}=12\cdot10^3\cdot RC=24V$, pues es una función constante en el tiempo.

La tensión promedio en la fuente es:

$$
\begin{aligned}
V_{f_{medio}} &= \frac{1}{T}\int_0^T v_f\left(t\right)dt = \frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T/2} 12\cdot 10^3 t\, dt + \int_{T/2}^{T} 12\cdot 10^3 t - 200\, dt\right] \\
V_{f_{medio}} &= \frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T} 12\cdot 10^3 t\, dt - \int_{T/2}^{T} 200\, dt\right] \\
V_{f_{medio}} &= \frac{1}{T}\cdot\left[12\cdot 10^3\frac{T^2}{2} - 200\frac{T}{2}\, dt\right] \\
V_{f_{medio}} &= \left[6\cdot 10^3 T - 100\right] = 0V
\end{aligned}
$$

La tensión promedio en el capacitor es:

$$
\begin{aligned}
V_{C_{medio}} &= \frac{1}{T}\int_0^T v_C\left(t\right)dt = \frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T/2} 12\cdot 10^3\left(t - CR\right)\, dt + \int_{T/2}^{T} 12\cdot 10^3\left(t - CR\right) - 200\, dt\right] \\
V_{C_{medio}} &= \frac{1}{T}\cdot\left[\int_0^{T} 12\cdot 10^3\left(t - CR\right)\, dt - \int_{T/2}^{T} 200\, dt\right] \\
V_{C_{medio}} &= \frac{1}{T}\cdot\left[\frac{12\cdot 10^3}{2}\left(\left(T - CR\right)^2 - \left(CR\right)^2\right) - 200\frac{T}{2}\, dt\right] \\
V_{C_{medio}} &= \frac{1}{T}\cdot\left[6\cdot 10^3\left(\left(T - CR\right)^2 - \left(-CR\right)^2\right) - 100T\right] = -24V
\end{aligned}
$$

Por tanto los factores de forma quedan:

$$
\begin{aligned}
FF_{V_R} &= \frac{V_{R_{medio}}}{V_{R_{RMS}}} = 1 \\
FF_{V_C} &= \frac{V_{C_{medio}}}{V_{C_{RMS}}} = -2.605
\end{aligned}
$$

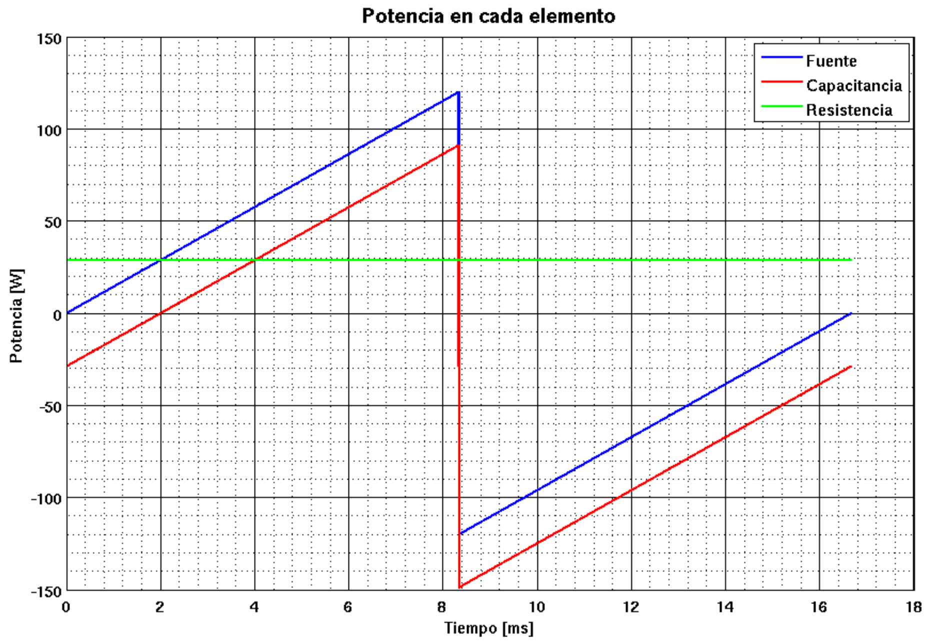
La potencia instantánea suministrada por la fuente es:

$$
p_f\left(t\right) = v_f\left(t\right)\cdot i_C\left(t\right) = \begin{cases} 12000t\cdot 12000C\ \ [W] & t\in[0; 8.35ms] \\ \left(12000t - 200\right)12000C\ \ [W] & t\in[8.35ms; 16.7ms] \end{cases}
$$

En vista de que la corriente del circuito es constante, y la tensión simétrica. Si obtenemos el promedio de la potencia instantánea, se obtendrá que la potencia media que entrega la fuente en cada ciclo es nula.

$$
P_{f_{media}} = \frac{1}{T}\int_0^T v_f\left(t\right)\cdot i_C\left(t\right)dt = \frac{1}{T}\cdot i_C\int_0^T v_f\left(t\right)dt = 0W
$$

El estudiante está invitado a demostrar que las potencias en cada elemento se comportan tal como indica la figura:



La potencia disipada en la resistencia es:

$$P_{R_{media}} = \frac{1}{T}\int_0^T v_R\left(t\right)\cdot i_C\left(t\right)dt = \frac{1}{T}\cdot i_C\int_0^T v_R\left(t\right)dt = 28.8W$$

Queda de parte del estudiante repetir todo el ejercicio con una onda sinusoidal de igual frecuencia y magnitud. A manera de comparar los resultados.